

广义塑性梯度模型的变分原理和边界条件

何贤锋¹, 赵 冰², 傅鹤林¹

(1. 中南大学 土木建筑学院, 长沙 410075; 2. 长沙理工大学 土木与建筑学院, 长沙 410076)

摘 要: 在广义塑性力学的双屈服面模型的体积屈服面和剪切屈服面中引进应变梯度项, 构造梯度依赖的双屈服面, 可以建立广义塑性梯度模型的理论框架, 此时的位移率 $\dot{\mathbf{u}}$ 、剪切塑性乘子率 $\dot{\lambda}_q$ 、体积塑性乘子率 $\dot{\lambda}_v$ 成了各自独立的变量。为了建立相应的数值模型, 构造了增量泛函, 建立并证明了 3 类变量 ($\dot{\mathbf{u}}$, $\dot{\lambda}_q$, $\dot{\lambda}_v$) 变分原理, 得到应力边界条件, 同时塑性乘子作为自然边界条件给出。

关 键 词: 广义塑性梯度模型; 变分原理; 边界条件

中图分类号: O 344.1

文献标识码: A

Variational principle and boundary conditions of gradient-dependent generalized plasticity model

HE Xian-feng¹, ZHAO Bing², FU He-lin¹

(1. School of Civil and Architectural Engineering, Central South University, Changsha 410075, China;

2. School of Bridge and Structure Engineering, Changsha University of Science and Technology, Changsha 410076, China)

Abstract: Gradient-dependent generalized plasticity mechanics (GGPM) in which the yield functions not only depend on stress tensor and an invariant plastic strain measure, but also depend on spatial derivatives of the latter quantity, is based on the generalized plasticity mechanics (GPM). It can describe the strain localization characteristics and the basic mechanical characteristics of geomaterials at the same time. In order to derive the equilibrium equations and the boundary conditions, an incremental functional in which the displacement $\dot{\mathbf{u}}$, plastic multiplier $\dot{\lambda}_q$ and $\dot{\lambda}_v$ are independent variables, is constructed to build up the variational principle of GGPM. The stress boundary conditions as well as the plastic factor boundary conditions are obtained by natural boundary conditions, so a numerical model can be ensured for geomaterial strain localization.

Key words: gradient-dependent generalized plasticity model; variational principle; boundary condition

1 引 言

岩土介质是三相多孔摩擦介质, 经典塑性力学的一些假设不再适用。当我们应用经典塑性力学于岩土介质时, 理论计算和实验结果之间存在矛盾。有学者放弃了经典塑性力学中不再适用的假设, 从固体力学基本原理直接导出了广义塑性势理论, 在此基础上建立了广义塑性力学^[1-3]。过去的 30 年间, 应变局局部化现象吸引了研究者的广泛关注^[4-9]。然而, 由于传统的连续介质理论的本构模型中缺少长度的量纲, 在预测材料行为时, 它们不能预测剪切带的宽度和间隔, 在应变局局部化的数值分析时常常

遇到病态的网格依赖性, 对本构关系十分敏感。为了克服上述困难, 过去几十年间发展了许多研究方法和模型^[10-12], 其中, 应变梯度理论在材料的本构描述中引进了场变量的梯度, 同时内部长度参数也进入了控制方程, 可以解决病态的网格依赖性、预测材料的尺寸效应等问题。

如果在广义塑性力学的基础上, 结合应变梯度理论的优点, 可建立广义塑性梯度模型^[8,9]。广义塑性梯度模型试图在较全面地反映出岩土的基本力学性质的同时, 也能解释应变局局部化现象。然而, 由于在广义塑性力学中引进了应变梯度, 塑性乘子作为独立的变量成为额外的自由度进入了控制方程,

塑性乘子的边界条件不再显而易见。

参考 Mühlhaus 和 Aifantis^[13], Z. M. Wang 和 M. L. Peterson^[14]的工作, 本文将建立广义塑性梯度理论的变分原理, 进而得到广义塑性梯度模型控制方程的离散方程, 同时得到其完备的边界方程, 得到方程的矩阵形式。

2 广义塑性梯度理论基本方程^[8, 9]

在广义塑性梯度模型中, 屈服函数要考虑应变梯度的影响。分别选取塑性剪切应变 γ_q^p 和塑性体积应变 ε_v^p 为硬化参量, 并在屈服面中分别引入硬化参量的拉普拉斯项, 于是, (后继) 体积屈服面和 (后继) 剪切屈服面可写为

$$f_q = f_q(\boldsymbol{\sigma}, \gamma_q^p, \nabla^2 \gamma_q^p) = 0 \quad (1)$$

$$f_v = f_v(\boldsymbol{\sigma}, \varepsilon_v^p, \nabla^2 \varepsilon_v^p) = 0 \quad (2)$$

剪切屈服面和体积屈服面的一致性条件为

$$\mathbf{n}_q^T \dot{\boldsymbol{\sigma}} - h_q \dot{\lambda}_q + c_q \nabla^2 \dot{\lambda}_q = 0 \quad (3)$$

$$\mathbf{n}_v^T \dot{\boldsymbol{\sigma}} - h_v \dot{\lambda}_v + c_v \nabla^2 \dot{\lambda}_v = 0 \quad (4)$$

式中:

$$\mathbf{n}_q = \frac{\partial f_q}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (5)$$

$$\mathbf{n}_v = \frac{\partial f_v}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (6)$$

分别为体积屈服面梯度矢量和剪切屈服面梯度矢量; 上标 “T” 表示 “矢量的转置”; $c_v = \frac{\partial f_v}{\partial \nabla^2 \varepsilon_v^p}$,

$c_q = \frac{\partial f_q}{\partial \nabla^2 \gamma_q^p}$ 是与局部化特征相关的物理量, 它反映的是材料微结构之间的影响及作用, 作者称之为“局部化参数”; $\dot{\lambda}_v$ 和 $\dot{\lambda}_q$ 分别为塑性体积乘子率和塑性剪切乘子率; h_v 为体积硬化模量; h_q 为剪切硬化模量。

在关联流动准则中, 总的塑性应变率表示为

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \dot{\lambda}_v \mathbf{n}_v + \dot{\lambda}_q \mathbf{n}_q \quad (7)$$

应力可表示为

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{D}[\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\lambda}_v \mathbf{n}_v - \dot{\lambda}_q \mathbf{n}_q] \quad (8)$$

不计体力时, 介质的平衡方程由下述方程确定:

$$\mathbf{L}^T \dot{\boldsymbol{\sigma}} = 0 \quad (9)$$

其中:

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 \\ 0 & \partial/\partial y \\ \partial/\partial y & \partial/\partial x \end{bmatrix} \quad (\text{平面问题}) \quad (10)$$

上述式 (3)、式 (4) 和式 (9) 共同构成了分析域的控制方程。此时塑性乘子是一个 2 阶微分方程。当硬化模量由正值变为负值时, 塑性乘子的分布成为了一个关于空间的周期解, 周期解的峰值区域形成局部化带。变形模式将由均匀变形模式变为局部化变形模式。局部化带内的塑性应变将不同于局部化带外的塑性应变, 由此可以反映出岩土介质的应变局部化特征。模型的局部化机制开始启动。

3 变分原理

考虑下述的增量泛函:

$$\begin{aligned} \Delta \Pi(\dot{\mathbf{u}}, \dot{\lambda}_v, \dot{\lambda}_q) = & \frac{1}{2} \int_V (\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\lambda}_v \mathbf{n}_v - \dot{\lambda}_q \mathbf{n}_q)^T \mathbf{D}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\lambda}_v \mathbf{n}_v - \dot{\lambda}_q \mathbf{n}_q) dV - \\ & \int_S \dot{\mathbf{u}}^T \dot{\mathbf{i}} dS + \frac{1}{2} \int_V [h_v \dot{\lambda}_v^2 + c_v (\nabla \dot{\lambda}_v)^T \nabla \dot{\lambda}_v + \\ & h_q \dot{\lambda}_q^2 + c_q (\nabla \dot{\lambda}_q)^T \nabla \dot{\lambda}_q] dV \end{aligned} \quad (11)$$

式中: $\dot{\mathbf{u}}$ 为位移; $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ 为应变速率; $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ 为应力速率; $\dot{\mathbf{i}}$ 为应力边界条件的力; S 为边界; V 为分析域。

上述泛函取驻值的条件为

$$\begin{aligned} \therefore \delta(\Delta \Pi) = & \int_V \delta(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\lambda}_v \mathbf{n}_v - \dot{\lambda}_q \mathbf{n}_q)^T \mathbf{D}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\lambda}_v \mathbf{n}_v - \dot{\lambda}_q \mathbf{n}_q) dV + \\ & \int_V [h_v \dot{\lambda}_v \delta \dot{\lambda}_v + c_v (\nabla \dot{\lambda}_v)^T (\delta \nabla \dot{\lambda}_v)] dV + \\ & \int_V [h_q \dot{\lambda}_q \delta \dot{\lambda}_q + c_q (\nabla \dot{\lambda}_q)^T (\delta \nabla \dot{\lambda}_q)] dV - \\ & \int_S \delta \dot{\mathbf{u}}^T \dot{\mathbf{i}} dS = 0 \end{aligned} \quad (12)$$

整理得:

$$\begin{aligned} \delta(\Delta \Pi) = & \int_V \delta \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^T \mathbf{D}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\lambda}_v \mathbf{n}_v - \dot{\lambda}_q \mathbf{n}_q) dV - \int_S \delta \dot{\mathbf{u}}^T \dot{\mathbf{i}} dS + \\ & \int_V -\delta \dot{\lambda}_v^T [\mathbf{n}_v^T \mathbf{D}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\lambda}_v \mathbf{n}_v - \dot{\lambda}_q \mathbf{n}_q) - h_v \dot{\lambda}_v] dV + \\ & \int_V c_v (\nabla \dot{\lambda}_v)^T (\delta \nabla \dot{\lambda}_v) dV + \\ & \int_V -\delta \dot{\lambda}_q^T [\mathbf{n}_q^T \mathbf{D}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\lambda}_v \mathbf{n}_v - \dot{\lambda}_q \mathbf{n}_q) - h_q \dot{\lambda}_q] dV + \\ & \int_V c_q (\nabla \dot{\lambda}_q)^T (\delta \nabla \dot{\lambda}_q) dV = 0 \end{aligned} \quad (13)$$

对式 (13) 的等号右边的第一项运用格林定理, 得:

$$\begin{aligned} & \int_V \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\lambda}_v \mathbf{n}_v - \dot{\lambda}_q \mathbf{n}_q) dV = \\ & \int_V -\delta \dot{\mathbf{u}}^T [\mathbf{L}^T \mathbf{D}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\lambda}_v \mathbf{n}_v - \dot{\lambda}_q \mathbf{n}_q)] dV + \\ & \int_S \delta \dot{\mathbf{u}}^T \mathbf{D}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\lambda}_v \mathbf{n}_v - \dot{\lambda}_q \mathbf{n}_q) \mathbf{n}_S dS \end{aligned} \quad (14)$$

式中 $\mathbf{n}_S$ 为边界的外法线方向。

分别对式 (13) 的等号右边的第 4、6 行的最后一项运用格林定理, 得:

$$\begin{aligned} & \int_V c_v (\nabla \delta \dot{\lambda}_v)^T \nabla \dot{\lambda}_v dV = - \int_V c_v \delta \dot{\lambda}_v^T \nabla^2 \dot{\lambda}_v dV + \\ & \int_{S_{\lambda_v}} c_v \delta \dot{\lambda}_v^T (\nabla \dot{\lambda}_v)^T \mathbf{n}_{\lambda_v} dS_{\lambda_v} \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} & \int_V c_q (\nabla \delta \dot{\lambda}_q)^T \nabla \dot{\lambda}_q dV = - \int_V c_q \delta \dot{\lambda}_q^T \nabla^2 \dot{\lambda}_q dV + \\ & \int_{S_{\lambda_q}} c_q \delta \dot{\lambda}_q^T (\nabla \dot{\lambda}_q)^T \mathbf{n}_{\lambda_q} dS_{\lambda_q} \end{aligned} \quad (16)$$

式中 $\mathbf{n}_{\lambda_v}$, $\mathbf{n}_{\lambda_q}$ 分别为弹塑性边界的外法线方向。

将式 (14), (15), (8) 和 (16) 代入式 (13) 有

$$\begin{aligned} & \delta(\Delta \Pi) = \\ & \int_V -\delta \dot{\mathbf{u}}^T [\mathbf{L}^T \mathbf{D}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\lambda}_v \mathbf{n}_v - \dot{\lambda}_q \mathbf{n}_q)] dV + \\ & \int_S \delta \dot{\mathbf{u}}^T (\dot{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{n}_S - \dot{\mathbf{t}}) dS + \\ & \int_V -\delta \dot{\lambda}_v^T [\mathbf{n}_v^T \dot{\boldsymbol{\sigma}} - h_v \dot{\lambda}_v + c_v \nabla^2 \dot{\lambda}_v] dV + \\ & \int_{S_{\lambda_v}} c_v \delta \dot{\lambda}_v^T (\nabla \dot{\lambda}_v)^T \mathbf{n}_{\lambda_v} dS_{\lambda_v} + \\ & \int_V -\delta \dot{\lambda}_q^T [\mathbf{n}_q^T \dot{\boldsymbol{\sigma}} - h_q \dot{\lambda}_q + c_q \nabla^2 \dot{\lambda}_q] dV + \\ & \int_{S_{\lambda_q}} c_q \delta \dot{\lambda}_q^T (\nabla \dot{\lambda}_q)^T \mathbf{n}_{\lambda_q} dS_{\lambda_q} = 0 \end{aligned} \quad (17)$$

由式 (17) 得到上述泛函的欧拉方程:

$$\mathbf{L}^T \mathbf{D}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\lambda}_v \mathbf{n}_v - \dot{\lambda}_q \mathbf{n}_q) = 0 \quad (18)$$

$$\mathbf{n}_v^T \dot{\boldsymbol{\sigma}} - h_v \dot{\lambda}_v + c_v \nabla^2 \dot{\lambda}_v = 0 \quad (19)$$

$$\mathbf{n}_q^T \dot{\boldsymbol{\sigma}} - h_q \dot{\lambda}_q + c_q \nabla^2 \dot{\lambda}_q = 0 \quad (20)$$

得到非常规 (塑性乘子) 边界条件:

$$\begin{cases} (\nabla \dot{\lambda}_v)^T \mathbf{n}_{\lambda_v} = 0 \\ (\nabla \dot{\lambda}_q)^T \mathbf{n}_{\lambda_q} = 0 \end{cases} \quad (21)$$

得到常规 (应力) 边界条件:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{n}_S = \dot{\mathbf{t}} \quad (22)$$

显然, 上式同式 (3), 式 (4) 和式 (9) 3 式的控制方程相同。由此得到了应力边界条件和塑性乘子边界条件。

4 离散化

对位移进行离散:

$$\mathbf{u} = \mathbf{H} \mathbf{a} \quad (23)$$

式中: $\mathbf{H}$ 为位移插值多项式矩阵; $\mathbf{a}$ 为节点位移向量。

应变为

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{L} \mathbf{u} = \mathbf{L} \mathbf{H} \mathbf{a} = \mathbf{B} \mathbf{a} \quad (24)$$

对体应变塑性乘子 λ_v 和偏应变塑性乘子 λ_q 及其拉普拉斯算子进行离散:

$$\begin{cases} \lambda_v = \mathbf{h}^T \mathbf{A}_v \\ \lambda_q = \mathbf{h}^T \mathbf{A}_q \end{cases} \quad (25)$$

$$\begin{cases} \nabla^2 \dot{\lambda}_v = \mathbf{p}^T \dot{\mathbf{A}}_v \\ \nabla^2 \dot{\lambda}_q = \mathbf{p}^T \dot{\mathbf{A}}_q \end{cases} \quad (26)$$

式中: $\mathbf{h}$ 为塑性乘子插值多项式矩阵; $\mathbf{A}_v$, $\mathbf{A}_q$ 分别为体应变塑性乘子向量和偏应变塑性乘子向量。且:

$$\mathbf{p} = \{\nabla^2 h_1, \nabla^2 h_2, \dots, \nabla^2 h_n\}^T \quad (27)$$

将式 (23), (24), (25), (26) 和 (27) 代入式 (17), 有

$$\begin{aligned} & \int_V (\mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \dot{\mathbf{a}} - \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{n}_v \mathbf{h}^T \dot{\mathbf{A}}_v - \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{n}_q \mathbf{h}^T \dot{\mathbf{A}}_q) dV = \\ & \int_S \mathbf{H}^T \dot{\mathbf{t}} dS \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} & \int_V \delta \dot{\mathbf{A}}_v^T \{ \mathbf{h} \mathbf{n}_v^T \mathbf{D} \mathbf{B} \dot{\mathbf{a}} + [-(\mathbf{n}_v^T \mathbf{D} \mathbf{n}_v + h_v) \mathbf{h} \mathbf{h}^T + \\ & \bar{c}_v \mathbf{h} \mathbf{p}^T] \dot{\mathbf{A}}_v - \mathbf{n}_v^T \mathbf{D} \mathbf{n}_q \mathbf{h} \mathbf{h}^T \dot{\mathbf{A}}_q \} dV = 0 \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} & \int_V \delta \dot{\mathbf{A}}_q^T \{ \mathbf{h} \mathbf{n}_q^T \mathbf{D} \mathbf{B} \dot{\mathbf{a}} + [-(\mathbf{n}_q^T \mathbf{D} \mathbf{n}_q + h_q) \mathbf{h} \mathbf{h}^T + \\ & \bar{c}_q \mathbf{h} \mathbf{p}^T] \dot{\mathbf{A}}_q - \mathbf{n}_q^T \mathbf{D} \mathbf{n}_v \mathbf{h} \mathbf{h}^T \dot{\mathbf{A}}_v \} dV = 0 \end{aligned} \quad (30)$$

将式 (29), (30), (31) 写成矩阵形式:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{aa} & \mathbf{K}_{a\lambda_v} & \mathbf{K}_{a\lambda_q} \\ \mathbf{K}_{\lambda_v a} & \mathbf{K}_{\lambda_v \lambda_v} & \mathbf{K}_{\lambda_v \lambda_q} \\ \mathbf{K}_{\lambda_q a} & \mathbf{K}_{\lambda_q \lambda_v} & \mathbf{K}_{\lambda_q \lambda_q} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{a}} \\ \dot{\mathbf{A}}_v \\ \dot{\mathbf{A}}_q \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_e \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (31)$$

式中: $\mathbf{K}_{aa} = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dV$; $\mathbf{K}_{a\lambda_v} = - \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{n}_v \mathbf{h}^T dV$;

$\mathbf{K}_{a\lambda_q} = - \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{n}_q \mathbf{h}^T dV$; $\mathbf{K}_{\lambda_v a} = \int_V \mathbf{h} \mathbf{n}_v^T \mathbf{D} \mathbf{B} dV$;

$\mathbf{K}_{\lambda_v \lambda_v} = - \int_V \mathbf{n}_v^T \mathbf{D} \mathbf{n}_q \mathbf{h} \mathbf{h}^T dV$; $\mathbf{K}_{\lambda_q a} = \int_V \mathbf{h} \mathbf{n}_q^T \mathbf{D} \mathbf{B} dV$;

$\mathbf{K}_{\lambda_q \lambda_v} = - \int_V \mathbf{n}_q^T \mathbf{D} \mathbf{n}_v \mathbf{h} \mathbf{h}^T dV$; $\mathbf{f}_e = \int_S \mathbf{H}^T \dot{\mathbf{t}} dS$;

$$K_{\lambda_q \lambda_q} = \int_V \left[-(n_q^T D n_q + h_q) h h^T + \bar{c}_q h p^T \right] dV;$$

$$K_{\lambda_v \lambda_v} = \int_V \left[-(n_v^T D n_v + h_v) h h^T + \bar{c}_v h p^T \right] dV。$$

于是问题归结为求解式(25)的非线性方程组。基本未知量为节点位移向量、体应变塑性乘子向量和偏应变塑性乘子向量。

当塑性区扩展到物体的外部边界时,式(21)必须满足。 $K_{\lambda_v \lambda_v}$ 和 $K_{\lambda_q \lambda_q}$ 变为

$$K_{\lambda_v \lambda_v} = \int_V \left[(n_v^T D n_v' + h_v) h h^T + c_v q q^T \right] dV \quad (32)$$

$$K_{\lambda_q \lambda_q} = \int_V \left[(n_q^T D n_q' + h_q) h h^T + c_q q q^T \right] dV \quad (33)$$

其中,

$$q = \{\nabla h_1, \nabla h_2, \dots, \nabla h_n\}^T \quad (34)$$

将式(32)同赵冰和李宁提出的广义塑性梯度模型^[15]相比较,它们具有相同的形式。基于变分原理,可以保证解答的唯一性,和网格细分时的收敛性。

5 结 语

(1) 基于变分原理得到的公式和方程弱形式得到公式相同。

(2) 基于变分原理,可以得到塑性乘子 $\dot{\lambda}_v$ 和 $\dot{\lambda}_q$ 的边界条件。

(3) 广义塑性梯度模型的变分原理可以保证解答的唯一性。

(4) 广义塑性梯度模型的变分原理可以保证网格细分时的收敛性。

参 考 文 献

- [1] 郑颖人, 沈珠江, 龚晓南. 广义塑性力学——岩土塑性力学原理[M]. 北京: 中国建筑工业出版社, 2003.
- [2] 郑颖人. 广义塑性力学讲座(1)——广义塑性力学理论[J]. 岩土力学, 2000, 21(2): 188—191.
ZHENG Ying-ren. Theory of generalized plastic mechanics[J]. *Rock and Soil Mechanics*, 2000, 21(2): 188—191.
- [3] 杨光华. 土的本构模型的数学理论及其应用[博士学位论文 D]. 北京: 清华大学水电系, 1999.
- [4] 赵锡宏, 张启辉. 土的剪切带和数值分析[M]. 北京: 机械工业出版社, 2003.
- [5] 潘一山, 徐秉业, 王明洋. 岩石塑性应变梯度与 II 类岩石变形行为研究[J]. 岩土工程学报, 1999, 21(4): 471—474.
PAN Yi-shan, XU Bing-ye, WANG Ming-yang. The study of plastic strain gradient and class II behavior for rock[J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 1999, 21(4): 471—474.
- [6] COMI C, PEREGO U. A generalized variable formulation for gradient dependent softening plasticity[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1996, (39): 3 731—3 755.
- [7] 赵冰, 李宁, 盛国刚. 软化岩土介质的应变局部化研究进展——意义·现状·应变梯度[J]. 岩土力学, 2005, 26(3): 494—499.
ZHAO Bing, LI Ning, SHENG Guo-gang. Recent development of strain localization of softening geomaterials[J]. *Rock and Soil Mechanics*, 2005, 26(3): 494—499.
- [8] 赵冰, 李宁, 盛国刚. 广义梯度塑性模型的理论框架[J]. 西安理工大学学报, 2005, 21(4): 351—355
ZHAO Bing, LI Ning, SHENG Guo-gang. Theory Framework of the Gradient-Dependent Generalized Plasticity[J]. *Journal of Xi'an University of Technology*, 2005, 21(4): 351—355.
- [9] 赵冰. 岩土介质应变局部化的广义塑性梯度理论研究[博士学位论文 D]. 西安: 西安理工大学, 2006.
- [10] 李国琛, 耶纳 M. 塑性大应变微结构力学(第二版)[M]. 北京: 科学出版社, 1998.
- [11] DE B R, MÜHLHAUS H B. Gradient-dependent plasticity: formulation and algorithmic aspects[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1992, 35: 521—539.
- [12] FLECK N A, HUCHINSON J W. A phenomenological theory for strain gradient effects in plasticity[J]. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 1993, (41): 1 825—1 857.
- [13] MÜHLHAUS H B, AIFANTIS E C. A variational principle for gradient plasticity[J]. *International Journal of Solids and Structure*, 1991, (28): 845—857.
- [14] WANG Z M, PETERSON M L. Variational principles for softening gradient dependent plasticity[J]. *International Journal of Solids and Structure*, 2001, (38): 8 685—8 700.
- [15] 赵冰, 李宁, 盛国刚, 等. 广义塑性梯度模型的数值模型和数值算法[J]. 岩石力学与工程学报, 2007, 26(4): 825—832.
ZHAO Bing, LI Ning, SHENG Guo-gang, et al. Numerical model and numerical algorithm of generalized gradient-dependent plasticity model[J]. *Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering*, 2007, 26(4): 825—832.
- [16] 赵冰, 李宁, 郑颖人. 塑性梯度体元及应变局部化启动机制分析[J]. 岩土力学, 2008, 29(6): 1 025—1 032.
ZHAO Bing, LI Ning, ZHENG Ying-ren. Study of plasticity gradient volume element and startup mechanism of strain localization[J]. *Rock and Soil Mechanics*, 2008, 29(6): 1 025—1 032.